

الاستدلال بالتراجع

Raisonnement par récurrence

تمرين 1

برهن بالتراجع أن:

$$1- \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن: } 2 + 5 + 8 + \dots + 3n + 2 = \frac{(n+1)(3n+4)}{2}$$

$$2- \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن: } 1 \times 2^2 + 2 \times 4^2 + 3 \times 6^2 + \dots + n(2n)^2 = [n(n+1)]^2$$

$$3- \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n > 0 \text{ فإن: } 1 \times 2^0 + 4 \times 2^1 + 7 \times 2^2 + \dots + (3n-2)2^{n-1} = 5 + (3n-5)2^n$$

$$4- \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن: } 1 + \alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^n = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} \quad (\alpha \in \mathbb{R} - \{0;1\})$$

$$5- \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n > 0 \text{ فإن: } \frac{2^2}{1 \times 3} \times \frac{3^2}{2 \times 4} \times \dots \times \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2n+2}{n+2} \quad (\text{بكالوريا تقني رياضي 2011})$$

$$6- \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n > 1 \text{ فإن: } 4^n > 3n+1$$

$$7- \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq 1 \text{ فإن: } 2^n \leq 2n! \quad (\text{نذكر أن } n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n)$$

$$8- \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن: } 7^n - 1 = 6k \text{ أو } 7^n - 1 = 6k \text{ حيث } k \text{ عدد صحيح.}$$

$$9- \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n > 0 \text{ فإن: } 5^{4n} - 3^{3n} \text{ مضاعف للعدد } 13.$$

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+1)e^x$.

$$1- \text{ عيّن } f', f'', f^{(3)}, f^{(4)} \text{ الدوال المشتقة المتتالية للدالة } f.$$

$$2- \text{ أعط تخميناً للمشتق النوني للدالة } f \text{ وليكن } f^{(n)}(x) \text{ حيث } n \text{ عدد طبيعي غير معدوم.}$$

$$3- \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \geq 1 \text{ فإن: } f^{(n)}(x) = (x+n+1)e^x.$$

تمرين 3

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$1- \text{ عيّن } f', f'', f^{(3)}, f^{(4)} \text{ الدوال المشتقة المتتالية للدالة } f.$$

$$2- \text{ أعط تخميناً للمشتق النوني للدالة } f \text{ وليكن } f^{(n)}(x) \text{ حيث } n \text{ عدد طبيعي غير معدوم.}$$

$$3- \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \geq 1 \text{ فإن: } f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot (n+1)!}{x^{n+2}}.$$